1/5

1	2	3	4
B	B	B⁻	R

CALIF.
A

APELLIDO Y NOMBRE: [redacted] MAIL: [redacted]HOTMAIL.COM
LIBRETA: 47/15 TURNO: 14 a 17 | 19 a 22 TEMA 1

Algebra Lineal - 1er Cuatrimestre 2016
1er Recuperatorio del 1er Parcial (12/07/2016)

√ 1. Sean S y T los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$ y $T = \langle (3, 1, 0, 0), (-1, 0, 2, 0), (1, 1, 1, 1)\rangle$.

(a) Probar que todo subespacio $W \subseteq \mathbb{R}^4$ distinto de S y de T con $\dim(W) = 3$ cumple

$$S + W = T + W = \mathbb{R}^4.$$

(b) Hallar un subespacio con las condiciones del item (a) tal que $S \cap T \subseteq W$.

√ 2. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) Sea $f : V \to W$ una transformación lineal y $\{v_1, \dots, v_r\}$ elementos de V tales que el conjunto $\{f(v_1), \dots, f(v_r)\}$ es linealmente independiente. Entonces $\{v_1, \dots, v_r\}$ es un conjunto linealmente independiente.

(b) Sea $f : V \to W$ una transformación lineal y $\{v_1, \dots, v_r\}$ elementos de V tales que el conjunto $\{f(v_1), \dots, f(v_r)\}$ genera W. Entonces $\{v_1, \dots, v_r\}$ es un conjunto de generadores de V.

(c) Sea $f : V \to V$ una transformación lineal y $(v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$, $(v_1, \dots, v_r)$ y $(v_{r+1}, \dots, v_n)$ bases de V, $\mathrm{Nu}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ respectivamente. Entonces $\{f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)\}$ es linealmente independiente.

(d) Sea $f : V \to V$ una transformación lineal con $n = \dim(V)$ y $\{v_1, \dots, v_r\}$ elementos de V tales que el conjunto $\{f(v_1), \dots, f(v_r)\}$ es linealmente independiente. Entonces, $\dim(\mathrm{Nu}(f)) = n - r$.

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ una matriz de rango 2 y S, T los subespacios

$$S = \{x \in \mathbb{R}^6 \mid Ax = 0\}, \quad T = \langle (-1, k, k-3), (1, 0, 2k+2), (1, -k, 2)\rangle.$$

Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ tales que exista $f : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ transformación lineal que cumpla simultáneamente

$$\dim(S \cap \mathrm{Nu}(f)) = 2 \;\text{ y }\; f(S) = T.$$

4. Se considera en $\mathbb{C}^{2\times 2}$ el producto interno $\langle A, B\rangle = tr(AB^*)$. Sea S el subespacio de $\mathbb{C}^{2\times 2}$,

$$S = \langle Id_2, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i-1 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\rangle.$$

Calcular el complemento ortogonal de S y la matriz de S más cercana a $B = \begin{pmatrix} 1+2i & 1 \\ 6-i & 2-i \end{pmatrix}$.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

Sean S y T subesp $\mathbb{R}^4$

$S = \{(x_1 x_2 x_3) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$ $(\dim S = 3)$ (1 ec en dim 4)

$T \langle (3100)(-1020)(1111) \rangle$ $\left(\text{como} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{triang sup} \Rightarrow \text{son li } \dim T = 3 \right)$

$\dim S + \dim T - \dim S \cap T < \dim \mathbb{R}^4 \Rightarrow \dim S \cap T \geq 2$

② Probar que $\forall \omega \subset \mathbb{R}^4$ $\omega \neq S$ $\omega \neq T$ $\dim(\omega) = 3$ cumple.

$$S + \omega = S + T = \mathbb{R}^4$$

Como $\dim \omega = 3$ y $\omega \neq S$ y $\omega \neq T$

$\left.\begin{array}{l} \exists\, v \in \omega / \cancel{v} \notin S \\ \exists\, \bar{v} \in \omega / \bar{v} \notin T \end{array}\right\}$ acá ya estaba porque $\dim S + \langle v \rangle$ ya es 4 y $\dim S + W \geq \dim S + \langle v \rangle$.

se tiene que $\dim S + \dim \omega - \dim S \cap \omega < \dim \mathbb{R}^4 \Rightarrow \dim S \cap \omega \geq 2$

como $\omega \neq S$ $\dim S \cap \omega < 3 \Rightarrow \dim S \cap \omega = 2$ ✱

usando razonamiento análogo obtengo $\dim S \cap T = 2$ ✱

- Si $V \in \langle \bar{V} \rangle$ tomo $\omega = \langle \bar{v}, \omega_1, \omega_2 \rangle$ ω_1, ω_2 li completan base

$$S + \omega = \langle S_1 S_2 S_3 \rangle + \langle \underset{\notin S}{\bar{v}}\ \underbrace{\underset{\in S}{\omega_1}\ \underset{\in S}{\omega_2}}_{\text{por } ✱} \rangle = \langle S_1 S_2 S_3 \bar{v}\ \omega_1 \omega_2 \rangle = (S_1 S_2 S_3 \bar{v}) = \mathbb{R}^4$$

$(S_1 S_2 S_3 \bar{v}) \subset \mathbb{R}^4$

$\dim (S_1 S_2 S_3 \bar{v}) = \dim \mathbb{R}^4$

$$T + \omega = \langle T_1 T_2 T_3 \rangle + \langle \underset{\notin T}{\bar{V}}\ \underbrace{\underset{\in T}{\omega_1}\ \underset{\in T}{\omega_2}}_{\text{por } ✱} \rangle = \langle T_1 T_2 T_3 \bar{v}\ \omega_1 \omega_2 \rangle = \langle T_1 T_2 T_3 \bar{v} \rangle = \mathbb{R}^4$$

$\langle T_1 T_2 T_3 \bar{v} \rangle \subset \mathbb{R}^4$

$\dim \langle T_1 T_2 T_3 \bar{v} \rangle = \dim \mathbb{R}^4$

$\Rightarrow S + \omega = \mathbb{R}^4 = T + \omega$

- Si $V \notin \langle \bar{v} \rangle$ armo base $\omega = \langle v, \bar{v}, \omega_1 \rangle$

$$S + \omega = \langle S_1 S_2 S_3 \rangle + \langle \underset{\notin S}{v}, \underbrace{\bar{v}, \omega_1}_{\in S} \rangle = \langle S_1 S_2 S_3 v \rangle = \mathbb{R}^4$$

$$T + \omega = \langle T_1 T_2 T_3 \rangle + \langle \bar{v}\, v\ \omega \rangle = \langle T_1 T_2 T_3 \bar{v} \rangle = \mathbb{R}^4$$

$$T + \omega = \mathbb{R}^4 = S + \omega$$

b) Hallar subesp con cond item A / $S \cap T \subset W$

$(1000) \notin S \quad (2.1 + 0 - 0 + 0 \neq 0)$

$(1000) \notin T \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ triang sup => son li

Busco $S \cap T$

$T = \langle (3100)(-1020)(1111) \rangle = \langle 3a - b + c, a + c, 2b + c, c \rangle$

en $S = \quad 2(a3 - b + c) + a + c - 2b - c, - c = 0$

$6a - 2b + \cancel{2c} + a + c - 2b \cancel{- c} \cancel{- c} = 0$

$7a - 4b + c = 0$

$c = -7a + 4b$

en $T = \langle 3a - b - 7a + 4b, a - 7a + 4b, 2b - 7a + 4b, -7a + 4b \rangle$

$\langle -4a + 3b, -6a + 4b, 6b - 7a, -7a + 4b \rangle$

$\langle (-4, -6, -7, -7) \; (3, 4, 6, 4) \rangle = S \cap T$

$\Rightarrow W = \langle \underbrace{(1000)}_{\notin S \notin T} \underbrace{(-4 -6 -7 -7)(3 4 6 4)}_{= S \cap T} \rangle$

③ Sea $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ rango 2 ($\dim Nu(A) = 4$), S y T subesp

$S = \{x \in \mathbb{R}^6 / Ax = 0\} = Nu\,A \Rightarrow \dim Nu\,A = 6 - rgA = 6 - 2 = 4 = \dim S$

$T = \langle (-1 \ k \ \ k-3)(1 \ 0 \ 2k+2)(1 \ -k \ 2) \rangle$

Hallar TODOS los $k \in \mathbb{R}$ / $f: \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ ~~∄~~ $\exists$ y cumpla

$\dim(S \cap Nu(f)) = 2$ y $f(S) = T$

llamemos $\{s_1\ s_2\ s_3\ s_4\}$ base de S y completamos a una base de $\mathbb{R}^6$ con $e_5\ e_6$

tomando $T_1 \notin \langle T_2 \rangle$ $\quad T_1, T_2 \in T$

$s_1 \longrightarrow T_1 \in T$
$s_2 \longrightarrow T_2 \in T$

como $f(S) = T$ entonces $T = \langle T_1, T_2 \rangle$

entonces $\dim T = 2$ ✓

$s_3 \longrightarrow 0$
$s_4 \longrightarrow 0$

$\dim(S \cap Nu\,f) = 2$ cumple

→ Ojo, para tener esto así tenés que empezar con base $\{s_3, s_4\}$ de $S \cap Nu\,f$, extenderla a base $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ de S y ahí seguir como hacés vos.

$e_5 \longrightarrow 0$
$e_6 \longrightarrow 0$

$T = \langle \underbrace{(-1 \ k \ k-3)}_{T_1} \underbrace{(1 \ 0 \ 2k+2)}_{T_2} \underbrace{(1 \ -k \ 2)}_{T_3} \rangle$

a ojo veo que si $\boxed{k=0}$ $T = \langle (-1\ 0\ -3) \underbrace{(1\ 0\ 2)}_{T_2} = \underbrace{(1\ 0\ 2)}_{T_3} \rangle = \langle (-1\ 0\ -3)(1\ 0\ 2) \rangle$

son li $\Rightarrow \dim T = 2$ ✓

triangulemos así encontramos otros k

$$\begin{pmatrix} -1 & k & k-3 \\ 1 & 0 & 2k+2 \\ 1 & -k & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 + f_2 \to f_2 \\ f_1 + f_3 \to f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & k & k-3 \\ 0 & k & 2k+2+k-3 \\ 0 & 0 & 2+k-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & k & k-3 \\ 0 & k & 3k-1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$$

si $k=0$ se anula nada más C_3 $\Rightarrow \dim T = 2$

si $k=1$ se anula nada más $f_3 \Rightarrow \dim T = 2$

para todos los demás k son ld $\Rightarrow \dim T = 3 \Rightarrow \nexists f$ que cumpla

$\Rightarrow \boxed{k=0}$ o $\boxed{k=1}$ ✓

(2) Decidir si son V o F

$\boxed{a}$ Sea $f: V \to W$ tl $\{v_1 \dots v_r\}$ elem de V / $\{f(v_1) \dots f(v_r)\}$ li

$\Rightarrow \{v_1 \dots v_r\}$ li $\boxed{V}$

Supongamos $\{v_1 \dots v_r\}$ ld $\Rightarrow \exists\, v_i \in \{v_1 \dots v_r\}$ /

$\exists\, a_1 \dots a_r \neq 0$ /

$a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \dots + a_r v_r = v_i$

$\Rightarrow f(a_1 v_1 + \dots + a_r v_r) = f(v_i) \quad \left(f(v_i) \in \{f(v_1) \dots f(v_r)\}\right)$

como f tl

$a_1 f(v_1) + \dots + a_{i-1} f(v_{i-1}) + a_{i+1} f(v_{i+1}) + \dots + a_r f(v_r) = f(v_i)$

$-\left(a_1 f(v_1) + \dots + a_{i-1} f(v_{i-1}) + a_{i+1} f(v_{i+1}) + \dots + a_r f(v_r)\right) + f(v_i) = 0$

ABS! Como $\{f(v_1) \dots f(v_r)\}$ li $\nexists\, a_1 \dots a_r \neq 0$ tq

$a_1 f(v_1) + \dots + a_r f(v_r) = 0 \Rightarrow (v_1 \dots v_r)$ ~~son~~ es conjto li ✓

$\boxed{b}$ Sea $f: V \to W$ tl y $\{v_1 \dots v_r\}$ elem de V / $\{f(v_1) \dots f(v_r)\}$ genera W

$\Rightarrow \{v_1 \dots v_r\}$ genera V $\boxed{F}$

$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$

canonica $\mathbb{R}^4$
$$\begin{cases} e_1^4 \longrightarrow e_1^2 \\ e_2^4 \longrightarrow e_2^2 \\ e_3^4 \longrightarrow 0 \\ e_4^4 \longrightarrow 0 \end{cases}$$
e_1^2, e_2^2 canonica $\mathbb{R}^2$

$\{f(e_1^4), f(e_2^4)\}$ genera $\mathbb{R}^2$ (o W)

pero $\{e_1^4, e_2^4\}$ No genera $\mathbb{R}^4$ (o V) ✓

$\boxed{c}$ Sea $f: V \to V$ t.l. con $\dim(V) = n$

$(v_1 \dots v_r, v_{r+1} \dots v_n)$ base V

$(v_1 \dots v_r)$ base $Nu(f)$

$(v_{r+1} \dots v_n)$ Base $Im(f)$ $\Rightarrow \{f(v_{r+1}) \dots f(v_n)\}$ es li $\boxed{V}$

como $Nu(f) \cap Im(f) = \{0\}$ ya que $B_{Nu} \cup B_{Im} = B_V$

$Nu\, f \oplus Im\, f = V$

$\Rightarrow f(v_i) \neq 0 \quad \forall i \in [r+1, n]$

$\boxed{P_{n+1}}$

$a_{r+1} v_{r+1} + \dots + a_n v_n = 0 \iff a_{r+1} \dots a_n = 0$

Sup $\exists f(v_i) \in (B_{Im}) \,/\, a_{r+1} f(v_{r+1}) + \dots + a_{i-1} f(v_{i-1}) + a_{i+1} f(v_{i+1}) + \dots + a_n f(v_n) = f(v_i)$

$\Downarrow$ Paso $f(v_i)$ restando y uso que f t.l.

$f(a_{r+1} v_{r+1} + \dots + a_n f(v_n) - v_i) = 0$

$\Downarrow$

$a_{r+1} v_{r+1} + \dots + a_n v_n - v_i \in Nu\, f$ ABSurdo! $(v_{r+1} \dots v_n) = im\, f$ y vimos $im\, f \cap Nu\, f = \{0\}$

$\Rightarrow \{f(v_{r+1}) \dots f(v_n)\}$ es li ✓

$\boxed{d}$ $f: V \to V$ t.l. $\dim(V) = n$ $\{v_1 \dots v_r\}$ elem V $\{f(v_1) \dots f(v_r)\}$ li

$\Rightarrow \dim(Nu(f)) = n - r$ $\boxed{F}$

$f: \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$

$$\begin{aligned} e_1 &\to e_1 \\ e_2 &\to e_2 \\ e_3 &\to e_3 \\ e_4 &\to e_4 \\ e_5 &\to 0 \\ e_6 &\to 0 \end{aligned}$$

tomo $\{e_1, e_2\} \Rightarrow \{f(e_1), f(e_2)\}$ es li

pero $Nu(f) = \langle e_5, e_6 \rangle \Rightarrow \dim Nu\, f = 2 \neq 6 - 2 = 4$

✓

(4) Se considera $\mathbb{C}^{2\times 2}$ con $\langle A,B\rangle = tr(AB^*) = tr(A\bar{B}^t)$

Sea S el subesp $S = \left\langle Id_2, \begin{pmatrix}1&0\\i-1&-i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\rangle$

$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Calcular complemento ortogonal de S y la matriz de S más cercana al $B = \begin{pmatrix}1+2i&1\\6-i&2-i\end{pmatrix}$

veamos que S sea ortogonal

$$\left\langle \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\rangle = tr\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = 0 \checkmark$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\i-1&-i\end{pmatrix}\right\rangle = Tr\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-i-1\\0&i\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix}0&*\\*&-i-1\end{pmatrix} = -i-1 \neq 0$$

tengo $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ ortogonales.

ortogonalizo $\begin{pmatrix}1&0\\i-1&-i\end{pmatrix} = V_1$

$$tr\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right) = 2$$

$$Tr\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = 2$$

$$Tr\left(\begin{pmatrix}1&0\\i-1&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right) = 1-i$$

$$tr\left(\begin{pmatrix}1&0\\i-1&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right) = i-1$$

$$w_3 = \begin{pmatrix}1&0\\i-1&-i\end{pmatrix} - \frac{\left\langle v_1, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} - \frac{\left\langle v_1, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$w_3 = \begin{pmatrix}1&0\\i-1&-i\end{pmatrix} - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} - \frac{i-1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

No hace falta conseguir una base ortogonal para S

$$w_3 = \begin{pmatrix}1&0\\i-1&-i\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1-i}{\cancel{\sqrt{2}}}&\frac{-i+1}{\cancel{\sqrt{2}}}\\\frac{i+1}{\cancel{\sqrt{2}}}&\frac{1-i}{\cancel{\sqrt{2}}}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

→ como busco b. ortogonal no hace falta normalizarlo y puedo volar este termino.

$$w_3 = \begin{pmatrix}i&i+1\\2(i-1)&-i\end{pmatrix}$$

$S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & i-1 \\ 2(i-1) & i \end{pmatrix} \right\rangle$

Hay un error de cuentas

$S^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\rangle$

$Tr \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = a + d = 0 \to a = -d$

$Tr \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = b + c = 0 \to b = -c$

$Tr \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & +2(-i-1) \\ -i-1 & -i \end{pmatrix} \right\rangle = (-i) \cdot a + b(-i-1) + c(2(-i-1)) + d \cdot (-i) = 0$

$-(-i)d + -c(-i-1) + 2c(-i-1) + d(-i) = 0$

$c(-i-1) = 0 \Rightarrow c = 0$

$b = 0$

$a = -d$

$\cancel{S^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle}$

$S^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

~~La matriz más cercana de S a~~ $B = \begin{pmatrix} 1+2i & 1 \\ 6-i & 2-i \end{pmatrix}$

arrastra error

$P_S(B) = B - P_{S^{\perp}}(B) = \begin{pmatrix} 1+2i & 1 \\ 6-i & 2-i \end{pmatrix} - \left\langle B \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

La idea está bien

$= \begin{pmatrix} 1-2i & 1 \\ 6-i & 2-i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & -(1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3i & 1 \\ 6-i & 3-2i \end{pmatrix}$

$tr \left(\begin{pmatrix} 1+2i & 1 \\ 6-i & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$-1 - 2i + 2 + i$

$\shortparallel$

$-1 - i$